| COLEGIO INSTITUTO TÉCNICO INTERNACIONAL IED<br>P.E.I. EDUCACIÓN EN TECNOLOGÍA Y SU INFLUENCIA EN LA CALIDAD DE VIDA | | |
|---|---|---|
| **DOCENTE:** Alejandra M Marta R | **ASIGNATURA:** Trigonometría | **CURSOS:** 1001 – 1002 JT |
| **CÓDIGO**: III – 10 – 06 – 09 – 2021 | **TEMA:** GUIA N° 10. Ley de Senos | |

## I. INTRODUCCIÓN

Queridos estudiantes, reciban un cordial y afectuoso saludo, espero todos se encuentren bien en sus hogares, junto a sus familias.

Para las semanas del 06 al 17 de septiembre desarrollarán la guía correspondiente al contenido: "***Ley de Senos***" contenido a desarrollar en el transcurso de las siguientes dos semanas. Es importante, realizar la lectura de la conceptualización contenida en la guía y registrar los ejemplos evidenciados en la misma.

Asimismo, es importante tener presente que el plazo máximo de entrega es el viernes 17 de septiembre de 2021.

Quedo atenta a cualquier duda e inquietud, las cuales serán resueltas por medio del correo **matematicas2021.citi.jt@gmail.com** o al WhatsApp 311 5477015.

Muchas gracias por su atención y disposición para cumplir con el proceso escolar desde casa.

Cordialmente

Alejandra Milena Marta R
Lic. en Matemáticas UPN
Magister en Educación PUJ
Colegio Instituto Técnico Internacional IED.

**IMPORTANTE TENER EN CUENTA PARA EL DESARROLLO Y ENVIO DE ACTIVIDADES**

1. El estudiante debe escribir la parte de conceptualización, contenida en la guía.
2. En la parte superior de TODAS las hojas de la actividad que se va a enviar, escribir con esfero nombre, apellido, curso y cada hoja numerarla.
3. Si no se utiliza camscanner o alguna aplicación similar, por favor, tomar fotos nítidas que faciliten la revisión de las actividades.
4. Las actividades deben ser enviadas al correo electrónico **matematicas2021.citi.jt@gmail.com**.
5. La actividad debe ser desarrollada por el estudiante, es decir, a puño y letra de este. No se permite editor de ecuaciones u otras aplicaciones que sistematicen las respuestas de las guías enviadas.

## II. CONCEPTUALIZACION

### 1. DESEMPEÑO PARA EVALUAR

- Reconoce si en la solución de un triangulo es posible usar el teorema del seno o el teorema del coseno.

## 2. CONCEPTOS GENERALES (Stewart, Redlin, & Watson, 2012)

### TRIANGULOS OBLICUANGULOS

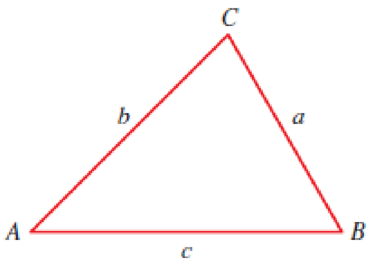



**FIGURA 1**

Las funciones trigonométricas también se pueden usar para resolver *triángulos oblicuángulos,* es decir, triángulos sin ángulos rectos. Para hacer esto, primero estudiamos la Ley de Senos aquí y a continuación la Ley de Cosenos en la siguiente sección. Para expresar estas leyes (o fórmulas) con más facilidad, seguimos la convención de marcar los ángulos de un triángulo como $a$, $b$, $c$, como en la Figura 1.

Para resolver un triángulo, necesitamos conocer cierta información acerca de sus lados y ángulos. Para determinar si tenemos suficiente información, con frecuencia es útil hacer un diagrama. Por ejemplo, si nos dan dos ángulos y el lado entre ellos, entonces es claro que se puede formar un triángulo y sólo uno (vea Figura 2(a)). Análogamente, si se conocen dos lados y el ángulo incluido, entonces se determina un triángulo único (Figura 2(c)). No obstante, si conocemos los tres ángulos pero ninguno de los lados, no podemos determinar de manera única el triángulo porque numerosos triángulos tienen los mismos tres ángulos. (Todos estos triángulos serían semejantes, desde luego.) Por lo tanto, no consideraremos este último caso.

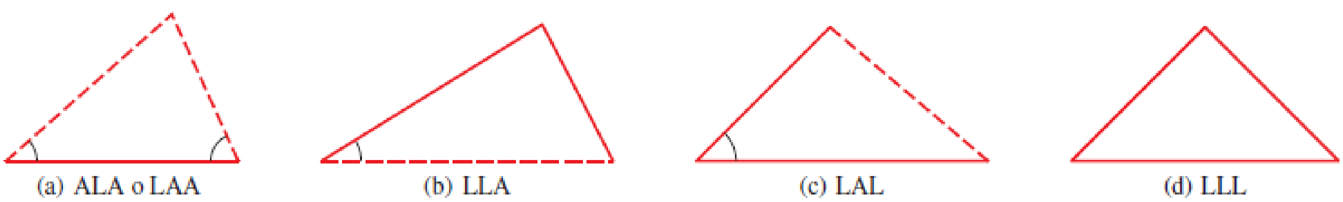



**FIGURA 2**

En general, un triángulo está determinado por tres de sus seis partes (ángulos y lados) mientras al menos una de estas tres partes sea un lado. Por lo tanto, las posibilidades ilustradas en la Figura 2 son como sigue.

**Caso 1** Un lado y dos ángulos (ALA o LAA)
**Caso 2** Dos lados y el ángulo opuesto a uno de esos lados (LLA)
**Caso 3** Dos lados y el ángulo entre ellos (LAL)
**Caso 4** Tres lados (LLL)

Los casos 1 y 2 se resuelven usando la Ley de Senos; los Casos 3 y 4 requieren la Ley de Cosenos.

### Ley de Senos

La **Ley de Senos** dice que en cualquier triángulo las longitudes de los lados son proporcionales a los senos de los ángulos opuestos correspondientes.

**LA LEY DE SENOS**

En el triángulo $ABC$ tenemos

$$\frac{\operatorname{sen} A}{a} = \frac{\operatorname{sen} B}{b} = \frac{\operatorname{sen} C}{c}$$

## EJEMPLO 1 | Rastreo de un satélite (ALA)

Un satélite que gira en órbita alrededor de la Tierra pasa directamente sobre estaciones de observación en Phoenix y Los Ángeles, que están a 340 millas entre sí. En un instante cuando el satélite está entre estas dos estaciones, se observa simultáneamente que su ángulo de elevación es 60° en Phoenix y 75° en Los Ángeles. ¿A qué distancia está el satélite de Los Ángeles?

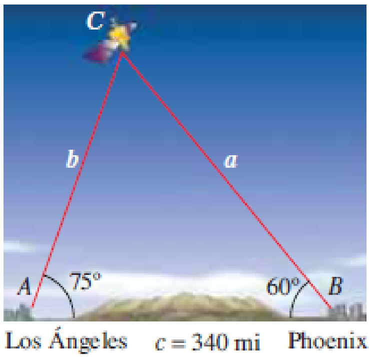



FIGURA 4

**SOLUCIÓN** Necesitamos hallar la distancia $b$ en la Figura 4. Como la suma de los ángulos en cualquier triángulo es 180°, vemos que $\angle C = 180° - (75° + 60°) = 45°$ (vea Figura 4), de modo que tenemos

$$\frac{\operatorname{sen} B}{b} = \frac{\operatorname{sen} C}{c} \qquad \text{Ley de Senos}$$

$$\frac{\operatorname{sen} 60°}{b} = \frac{\operatorname{sen} 45°}{340} \qquad \text{Sustituya}$$

$$b = \frac{340 \operatorname{sen} 60°}{\operatorname{sen} 45°} \approx 416 \qquad \text{Despeje } b$$

La distancia del satélite a Los Ángeles es aproximadamente 416 millas.

## EJEMPLO 2 | Solución de un triángulo (LAA)

Resuelva el triángulo de la Figura 5.

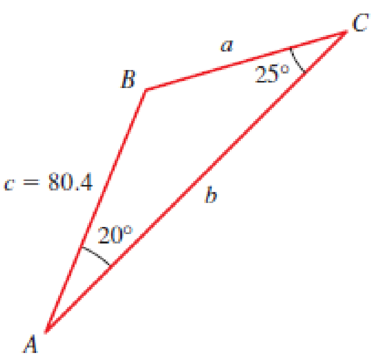



FIGURA 5

**SOLUCIÓN** Primero, $\angle B = 180° - (20° + 25°) = 135°$. Como se conoce el lado $c$, para hallar el lado $a$ usamos la relación

$$\frac{\operatorname{sen} A}{a} = \frac{\operatorname{sen} C}{c} \qquad \text{Ley de Senos}$$

$$a = \frac{c \operatorname{sen} A}{\operatorname{sen} C} = \frac{80.4 \operatorname{sen} 20°}{\operatorname{sen} 25°} \approx 65.1 \qquad \text{Despeje } a$$

Análogamente, para hallar $b$, usamos

$$\frac{\operatorname{sen} B}{b} = \frac{\operatorname{sen} C}{c} \qquad \text{Ley de Senos}$$

$$b = \frac{c \operatorname{sen} B}{\operatorname{sen} C} = \frac{80.4 \operatorname{sen} 135°}{\operatorname{sen} 25°} \approx 134.5 \qquad \text{Despeje } b$$

**Caso Ambiguo**

En los Ejemplos 1 y 2 se determinó un triángulo único por medio de la información dada. Esto siempre es cierto para el Caso 1 (ALA o LAA). Pero en el Caso 2 (LLA) puede haber dos triángulos, un triángulo o no haber triángulo con las propiedades dadas. Por esta razón, el Caso 2 a veces se denomina **caso ambiguo**. Para ver por qué esto es así, mostramos en

la Figura 6 las posibilidades cuando nos dan el ángulo $A$ y los lados $a$ y $b$. En el inciso (a) no es posible una solución, porque el lado $a$ es demasiado corto para completar el triángulo. En el inciso (b) la solución es un triángulo rectángulo. En el inciso (c) son posibles dos soluciones, y en el inciso (d) hay un triángulo único con las propiedades dadas. Ilustramos las posibilidades del Caso 2 en los ejemplos siguientes.

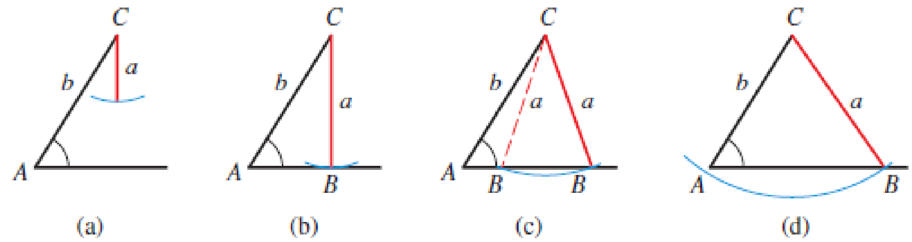



**FIGURA 6** El caso ambiguo

## EJEMPLO 3 | LLA, el caso de una solución

Resuelva el triángulo $ABC$, donde $\angle A = 45°$, $a = 7\sqrt{2}$, y $b = 7$.

**SOLUCIÓN** Primero trazamos el triángulo con la información que tenemos (vea Figura 7). Nuestro dibujo es necesariamente tentativo porque todavía no conocemos los otros ángulos, pero podemos ver ahora las posibilidades.

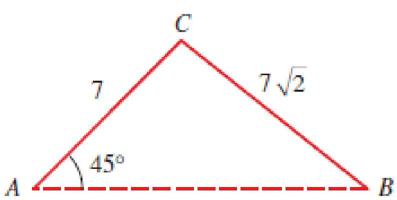



**FIGURA 7**

Primero hallamos $\angle B$.

$$\frac{\text{sen } A}{a} = \frac{\text{sen } B}{b} \qquad \text{Ley de Senos}$$

$$\text{sen } B = \frac{b \text{ sen } A}{a} = \frac{7}{7\sqrt{2}} \text{ sen } 45° = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{1}{2} \qquad \text{Despeje sen } B$$

Consideramos sólo ángulos menores a 180°, porque no hay triángulo que pueda contener un ángulo de 180° o mayor.

¿Cuáles ángulos $B$ tienen sen $B = \frac{1}{2}$? De la sección precedente sabemos que hay dos de estos ángulos menores a 180° (son 30° y 150°). ¿Cuál de estos ángulos es compatible con lo que sabemos acerca del triángulo $ABC$? Como $\angle A = 45°$, no podemos tener $\angle B = 150°$ porque $45° + 150° > 180°$. Por lo tanto, $\angle B = 30°$ y el ángulo restante es $\angle C = 180° - (30° + 45°) = 105°$.

Ahora podemos hallar el lado $c$.

$$\frac{\text{sen } B}{b} = \frac{\text{sen } C}{c} \qquad \text{Ley de Senos}$$

$$c = \frac{b \text{ sen } C}{\text{sen } B} = \frac{7 \text{ sen } 105°}{\text{sen } 30°} = \frac{7 \text{ sen } 105°}{\frac{1}{2}} \approx 13.5 \qquad \text{Despeje } c$$

## EJEMPLO 4 | LLA, el caso de dos soluciones

Resuelva el triángulo $ABC$ si $\angle A = 43.1°$, $a = 186.2$ y $b = 248.6$.

**SOLUCIÓN** Con la información dada, trazamos el triángulo que se ve en la Figura 8. Observe que el lado $a$ puede trazarse en dos posiciones posibles para completar el triángulo. De la Ley de Senos

$$\text{sen } B = \frac{b \text{ sen } A}{a} = \frac{248.6 \text{ sen } 43.1°}{186.2} \approx 0.91225$$

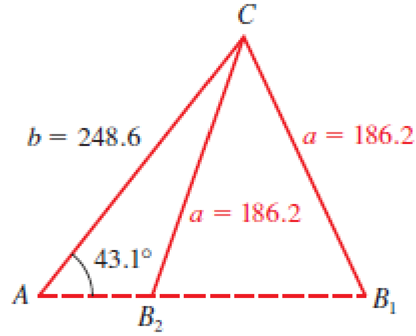



FIGURA 8

Hay dos posibles ángulos $B$ entre 0° y 180° tales que sen $B = 0.91225$. Usando una calculadora, encontramos que uno de los ángulos es $\text{sen}^{-1}(0.91225) \approx 65.8°$. El otro ángulo es aproximadamente $180° - 65.8° = 114.2°$. Denotamos estos dos ángulos por $B_1$ y $B_2$ de modo que

$$\angle B_1 \approx 65.8° \qquad \text{y} \qquad \angle B_2 \approx 114.2°$$

Entonces dos triángulos satisfacen las condiciones dadas: el triángulo $AB_1C_1$ y el triángulo $AB_2C_2$.

**Resuelva el triángulo $AB_1C_1$:**

$$\angle C_1 \approx 180° - (43.1° + 65.8°) = 71.1° \qquad \text{Encuentre } \angle C_1$$

Así, $$c_1 = \frac{a_1 \text{ sen } C_1}{\text{sen } A} \approx \frac{186.2 \text{ sen } 71.1°}{\text{sen } 43.1°} \approx 257.8 \qquad \text{Ley de Senos}$$

**Resuelva el triángulo $AB_2C_2$:**

$$\angle C_2 \approx 180° - (43.1° + 114.2°) = 22.7° \qquad \text{Encuentre } \angle C_2$$

Así, $$c_2 = \frac{a_2 \text{ sen } C_2}{\text{sen } A} \approx \frac{186.2 \text{ sen } 22.7°}{\text{sen } 43.1°} \approx 105.2 \qquad \text{Ley de Senos}$$

Los triángulos $AB_1C_1$ y $AB_2C_2$ se ven en la Figura 9.

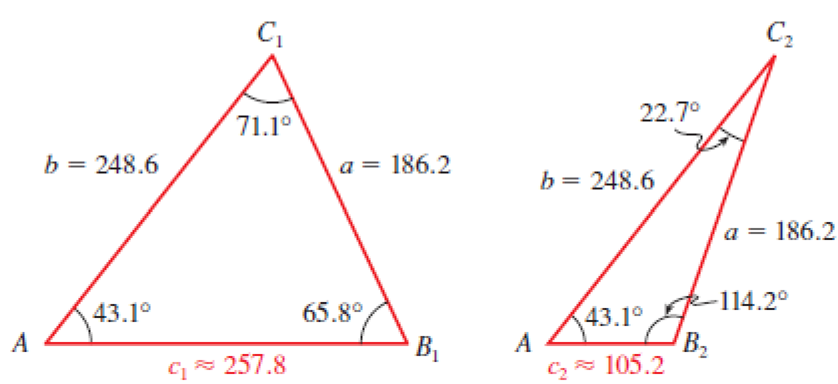



FIGURA 9

**EJEMPLO 5** | LLA, el caso sin solución

Resuelva el triángulo $ABC$, donde $\angle A = 42°$, $a = 70$ y $b = 122$.

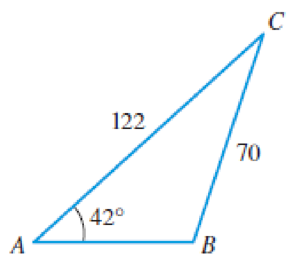



**FIGURA 10**

**SOLUCIÓN** Para organizar la información dada, trazamos el diagrama de la Figura 10. Tratemos de hallar el $\angle B$. Tenemos

$$\frac{\operatorname{sen} A}{a} = \frac{\operatorname{sen} B}{b} \qquad \text{Ley de Senos}$$

$$\operatorname{sen} B = \frac{b \operatorname{sen} A}{a} = \frac{122 \operatorname{sen} 42°}{70} \approx 1.17 \qquad \text{Despeje sen } B$$

Como el seno de un ángulo nunca es mayor a 1, concluimos que no hay triángulo que satisfaga las condiciones dadas en este problema.

## III. ACTIVIDADES POR DESARROLLAR

### CONCEPTOS

1. En el triángulo $ABC$ con lados $a$, $b$ y $c$ la Ley de Senos dice que

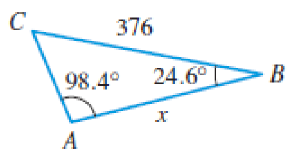
$$\frac{\square}{\square} = \frac{\square}{\square} = \frac{\square}{\square}$$

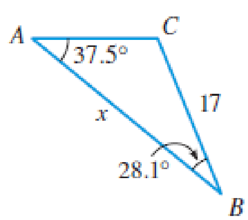
2. ¿En cuál de los siguientes casos podemos usar la Ley de Senos para resolver un triángulo?

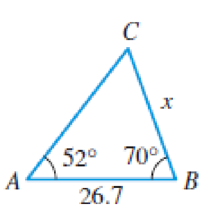
ALA LLL LAL LLA

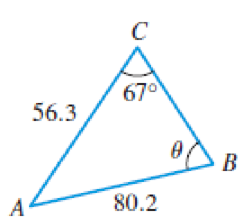
### HABILIDADES

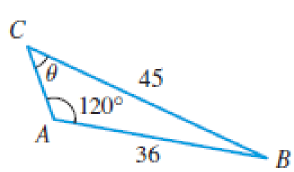
**3-8** ■ Use la Ley de Senos para hallar el lado $x$ o ángulo $\theta$ indicados.

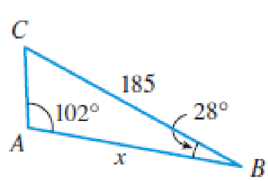
3. 


4. 

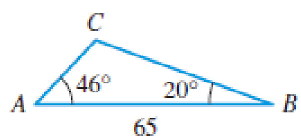

5. 

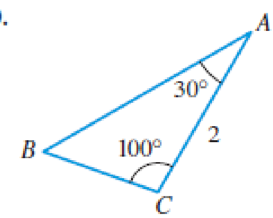

6. 

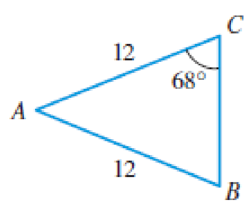

7. 

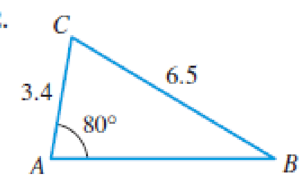

8. 


**9-12** ■ Resuelva el triángulo usando la Ley de Senos.

9. 


10. 


11. 


12. 


**13-18** ■ Trace cada triángulo y a continuación resuelva el triángulo usando la Ley de Senos.

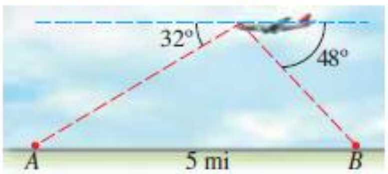
13. $\angle A = 50°$, $\angle B = 68°$, $c = 230$
14. $\angle A = 23°$, $\angle B = 110°$, $c = 50$
15. $\angle A = 30°$, $\angle C = 65°$, $b = 10$
16. $\angle A = 22°$, $\angle B = 95°$, $a = 420$
17. $\angle B = 29°$, $\angle C = 51°$, $b = 44$
18. $\angle B = 10°$, $\angle C = 100°$, $c = 115$

**19.**

**Vuelo de un avión** Un piloto está volando sobre una carretera recta. Él determina los ángulos de depresión a dos señales de distancia, colocadas a 5 millas entre sí, y encuentra que son de 32° y 48° como se muestra en la figura.

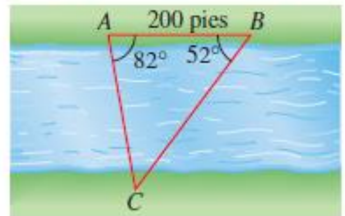
(a) Encuentre la distancia entre el avión y el punto $A$.

(b) Encuentre la elevación del avión.




**20.**

**Distancia entre márgenes de un río** Para hallar la distancia de una orilla a la otra de un río, una experta en topografía escoge los puntos $A$ y $B$, que están a 200 pies entre sí en un lado del río (vea la figura). A continuación, ella escoge un punto de referencia $C$ en el lado opuesto del río y encuentra que $\angle BAC \approx 82°$ y $\angle ABC \approx 52°$. Aproxime la distancia de $A$ a $C$.




## IV. AUTOEVALUACION

1. **Analiza y responde en tu cuaderno las siguientes preguntas:**
   - ¿Qué aprendiste?
   - ¿Se te facilitaron los temas desarrollados en la guía?
   - ¿Qué se te facilitó?, ¿qué se te dificultó?
   - ¿Necesitas refuerzo?
2. **Con respecto a la guía**
   - ¿La guía fue clara?
   - ¿Fácil de comprender?
   - ¿Requieres de más ejemplos?

## V. BIBLIOGRAFIA


Stewart, J., Redlin, L., & Watson, S. (2012). *Precálculo. Matematicas para el Cáculo* (6° ed.). México D.F.: Cengage Learning.