DOCENTE: Alejandra M Marta R	**ASIGNATURA:** Trigonometría	**CURSOS:** 1001 - 1002 JT
CÓDIGO: II - 08-26-07-2021	**TEMA:** GUIA N° 8. Funciones Trigonométricas de ángulos	

I. INTRODUCCIÓN

Queridos estudiantes, reciban un cordial y afectuoso saludo, espero todos se encuentren bien en sus hogares, junto a sus familias.

Para la semana del 26 al 30 de julio desarrollarán la guía correspondiente al contenido: "***Funciones Trigonométricas de ángulos***" contenido a desarrollar en el transcurso de la semana. Es importante, realizar la lectura de la conceptualización contenida en la guía y registrar los ejemplos evidenciados en la misma. Adicionalmente, en el transcurso de la semana, se compartirá por Drive a los correos institucionales, un video explicativo del tema, con el fin de facilitar y contribuir a la comprensión de este.

Asimismo, la guía de la semana se subirá a través de la plataforma Classroom, para ser desarrollada y enviada de vuelta mediante la misma aplicación. El plazo máximo de entrega es el miércoles 04 de agosto de 2021.

Quedo atenta a cualquier duda e inquietud, las cuales serán resueltas por medio del correo **matematicas2021.citi.jt@gmail.com** o al WhatsApp 311 5477015.

Muchas gracias por su atención y disposición para cumplir con el proceso escolar desde casa.

Cordialmente

Alejandra Milena Marta R
Lic. en Matemáticas UPN
Magister en Educación PUJ
Colegio Instituto Técnico Internacional IED.

IMPORTANTE TENER EN CUENTA PARA EL DESARROLLO Y ENVIO DE ACTIVIDADES

1. El estudiante debe escribir la parte de conceptualización, contenida en la guía.
2. En la parte superior de TODAS las hojas de la actividad que se va a enviar, escribir con esfero nombre, apellido, curso y cada hoja numerarla.
3. Si no se utiliza camscanner o alguna aplicación similar, por favor, tomar fotos nítidas que faciliten la revisión de las actividades.
4. Las actividades deben ser enviadas por Classroom. Enlace que se envió a través del correo institucional.
5. La actividad debe ser desarrollada por el estudiante, es decir, a puño y letra de este. No se permite editor de ecuaciones u otras aplicaciones que sistematicen las respuestas de las guías enviadas.

II. CONCEPTUALIZACION

1. DESEMPEÑO PARA EVALUAR

- Determinar los valores de las funciones trigonométricas de los principales triángulos.

2. CONCEPTOS GENERALES

FUNCIONES TRIGONOMETRICAS DE ANGULOS (Stewart, Redlin, & Watson, 2012)

Sea POQ un triángulo rectángulo con ángulo agudo θ como se ve en la Figura 1(a). Ponga θ en posición normal como se muestra en la Figura 1(b).

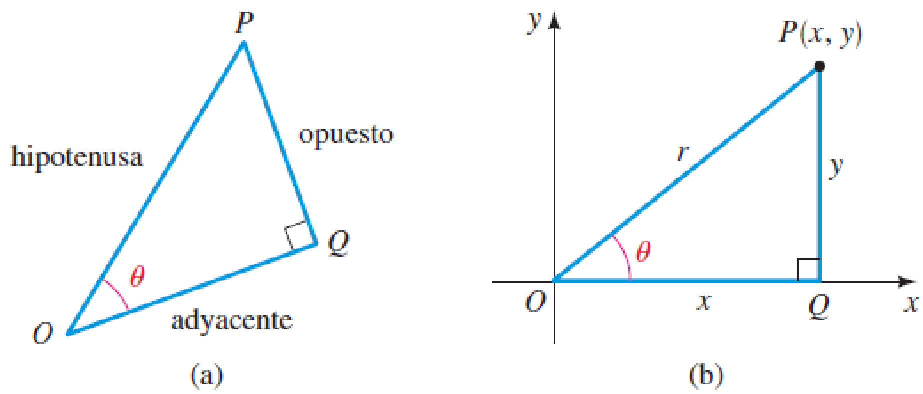


FIGURA 1

Entonces $P = P(x, y)$ es un punto en el lado terminal de θ. En el triángulo POQ, el lado opuesto tiene longitud y y el lado adyacente tiene longitud x. Usando el Teorema de Pitágoras, vemos que la hipotenusa tiene longitud $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. Por lo tanto,

$$\operatorname{sen} \theta = \frac{y}{r} \qquad \cos \theta = \frac{x}{r} \qquad \tan \theta = \frac{y}{x}$$

Las otras relaciones trigonométricas se pueden hallar en la misma forma.

Estas observaciones nos permiten extender las relaciones trigonométricas a cualquier ángulo. Definimos las funciones trigonométricas de ángulos como sigue (vea Figura 2).

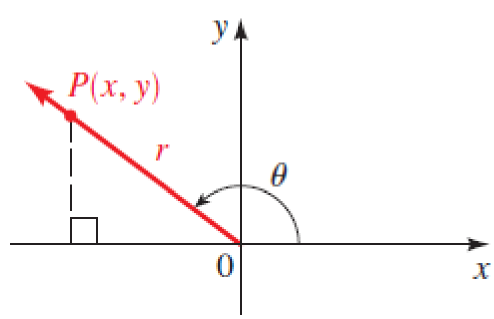


FIGURA 2

DEFINICIÓN DE LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

Sea θ un ángulo en posición normal y sea $P(x, y)$ un punto en el lado terminal. Si $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ es la distancia del origen al punto $P(x, y)$, entonces

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{y}{r} \qquad \cos\theta = \frac{x}{r} \qquad \tan\theta = \frac{y}{x} \quad (x \neq 0)$$

$$\csc\theta = \frac{r}{y} \quad (y \neq 0) \qquad \sec\theta = \frac{r}{x} \quad (x \neq 0) \qquad \cot\theta = \frac{x}{y} \quad (y \neq 0)$$

Como la división entre 0 no es una operación definida, ciertas funciones trigonométricas no están definidas para ciertos ángulos. Por ejemplo, $\tan 90° = y/x$ no está definida porque $x = 0$. Los ángulos para los cuales las funciones trigonométricas pueden no estar definidas son los ángulos para los cuales la coordenada x o la y de un punto en el lado terminal del ángulo es 0. Éstos son **ángulos cuadrantales**, es decir, ángulos que son coterminales con los ejes de coordenadas.

Es un dato de la mayor importancia que las funciones trigonométricas *no* dependen de la selección del punto $P(x, y)$. Esto es porque si $P'(x', y')$ es cualquier otro punto en el lado terminal, como en la figura 3, entonces los triángulos POQ y $P'OQ'$ son semejantes.

Evaluación de funciones trigonométricas de cualquier ángulo

De la definición vemos que los valores de las funciones trigonométricas son todos positivos si el ángulo θ tiene su lado terminal en el primer cuadrante. Esto es porque x y y son positivas en este cuadrante. [Por supuesto, r es siempre positiva porque es simplemente la distancia del origen al punto $P(x, y)$.] Si el lado terminal de θ está en el segundo cuadrante, sin embargo, entonces x es negativa y y positiva. Por lo tanto, en el segundo cuadrante las funciones sen θ y csc θ son positivas, y todas las otras funciones trigonométricas tienen valores negativos. Se pueden comprobar las otras entradas de la tabla siguiente.

SIGNOS DE LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

Cuadrante	Funciones positivas	Funciones negativas
I	todas	ninguna
II	sen, csc	cos, sec, tan, cot
III	tan, cot	sen, csc, cos, sec
IV	cos, sec	sen, csc, tan, cot

A continuación llevamos nuestra atención a hallar los valores de las funciones trigonométricas para ángulos que no sean agudos.

EJEMPLO 1 | Hallar funciones trigonométricas de ángulos

Encuentre **(a)** cos 135° y **(b)** tan 390°.

SOLUCIÓN

(a) De la Figura 4 vemos que $\cos 135° = -x/r$. Pero $\cos 45° = x/r$, y como $\cos 45° = \sqrt{2}/2$ tenemos

$$\cos 135° = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

(b) Los ángulos 390° y 30° son coterminales. De la Figura 5 es evidente que $\tan 390° = \tan 30°$ y, como $\tan 30° = \sqrt{3}/3$, tenemos

$$\tan 390° = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

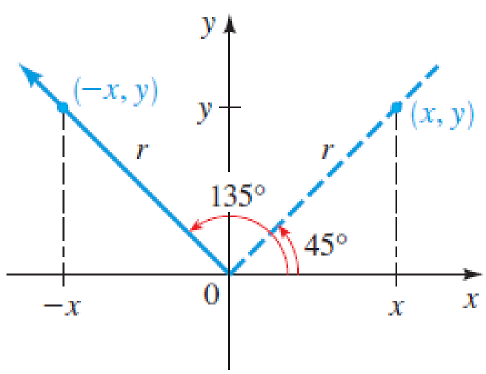


FIGURA 4

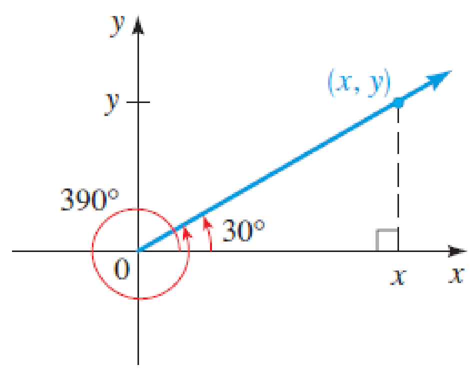
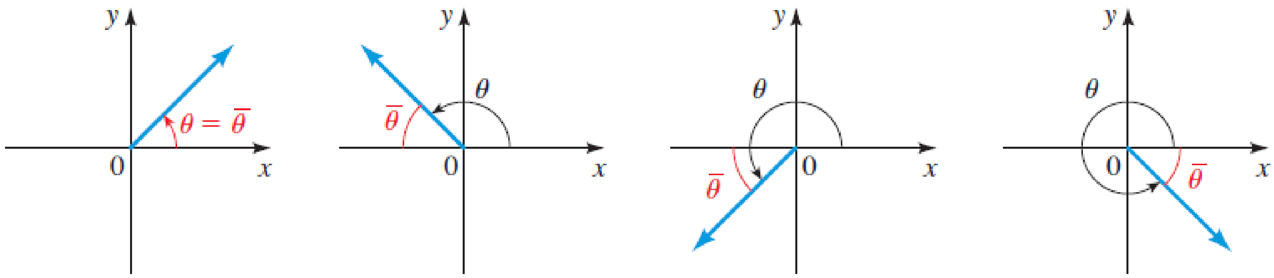


FIGURA 5

Del Ejemplo 1 vemos que las funciones trigonométricas para ángulos que no son agudos tienen el mismo valor, excepto posiblemente por el signo, como las correspondientes funciones trigonométricas de un ángulo agudo. Ese ángulo agudo recibirá el nombre de *ángulo de referencia.*

> **ÁNGULO DE REFERENCIA**
>
> Sea θ un ángulo en posición normal. El **ángulo de referencia** $\overline{\theta}$ asociado con θ es el ángulo agudo formado por el lado terminal de θ y el eje x.

La Figura 6 muestra que para hallar un ángulo de referencia $\bar{\theta}$, es útil conocer el cuadrante en el que se encuentre el lado terminal del ángulo θ.



EJEMPLO 2 | Hallar ángulos de referencia

Encuentre el ángulo de referencia para **(a)** $\theta = \dfrac{5\pi}{3}$ y **(b)** $\theta = 870°$.

SOLUCIÓN

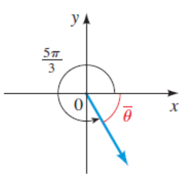


FIGURA 7

(a) El ángulo de referencia es el ángulo agudo formado por el lado terminal del ángulo $5\pi/3$ y el eje x (vea Figura 7). Como el lado terminal de este ángulo está en el cuarto cuadrante, el ángulo de referencia es

$$\bar{\theta} = 2\pi - \frac{5\pi}{3} = \frac{\pi}{3}$$

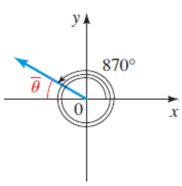


FIGURA 8

(b) Los ángulos 870° y 150° son coterminales [porque $870 - 2(360) = 150$]. Entonces, el lado terminal de este ángulo está en el segundo cuadrante (vea Figura 8). Por lo tanto, el ángulo de referencia es

$$\bar{\theta} = 180° - 150° = 30°$$

EVALUACIÓN DE FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS PARA CUALQUIER ÁNGULO

Para hallar los valores de las funciones trigonométricas para cualquier ángulo θ, damos los siguientes pasos.

1. Hallar el ángulo de referencia $\bar{\theta}$ asociado con el ángulo θ.
2. Determinar el signo de la función trigonométrica de θ observando el cuadrante en el que se encuentre θ.
3. El valor de la función trigonométrica de θ es el mismo, excepto posiblemente por el signo, que el valor de la función trigonométrica de $\bar{\theta}$.

EJEMPLO 3 | Uso del ángulo de referencia para evaluar funciones trigonométricas

Encuentre **(a)** sen 240° y **(b)** cot 495°.

SOLUCIÓN

(a) Este ángulo tiene su lado terminal en el tercer cuadrante, como se muestra en la Figura 9. El ángulo de referencia es, por lo tanto, $240° - 180° = 60°$ y el valor de sen 240° es negativo. Entonces

$$\operatorname{sen} 240° = \underbrace{-}_{\text{Signo}}\underbrace{\operatorname{sen} 60°}_{\text{Ángulo de referencia}} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

(b) El ángulo de 495° es coterminal con el ángulo de 135°, y el lado terminal de este ángulo está en el segundo cuadrante, como se muestra en la Figura 10. Por lo tanto, el ángulo de referencia es $180° - 135° = 45$ y el valor de cot 495° es negativo. Tenemos

$$\underbrace{\cot 495° = \cot 135°}_{\text{Ángulos coterminales}} = \underbrace{-}_{\text{Signo}}\underbrace{\cot 45°}_{\text{Ángulo de referencia}} = -1$$

EJEMPLO 4 | Uso del ángulo de referencia para evaluar funciones trigonométricas

Encuentre **(a)** $\operatorname{sen}\frac{16\pi}{3}$ y **(b)** $\sec\left(-\frac{\pi}{4}\right)$.

SOLUCIÓN

(a) El ángulo $16\pi/3$ es coterminal con $4\pi/3$, y estos ángulos están en el tercer cuadrante (vea Figura 11). Entonces, el ángulo de referencia es $(4\pi/3) - \pi = \pi/3$. Como el valor del seno es negativo en el tercer cuadrante, tenemos

$$\underbrace{\operatorname{sen}\frac{16\pi}{3} = \operatorname{sen}\frac{4\pi}{3}}_{\text{Ángulos coterminales}} = \underbrace{-}_{\text{Signo}}\underbrace{\operatorname{sen}\frac{\pi}{3}}_{\text{Ángulo de referencia}} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

(b) El ángulo $-\pi/4$ está en el cuarto cuadrante, y su ángulo de referencia es $\pi/4$ (vea figura 12). Como la secante es positiva en este cuadrante, obtenemos

$$\sec\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \underbrace{+}_{\text{Signo}}\sec \underbrace{\frac{\pi}{4}}_{\text{Ángulo de referencia}} = \sqrt{2}$$

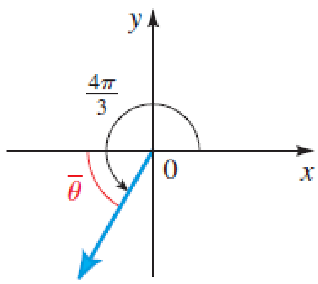


FIGURA 11
sen $\frac{16\pi}{3}$ *es negativo.*

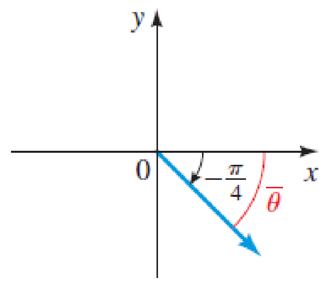


FIGURA 12
$\cos(-\frac{\pi}{4})$ *es positivo por lo tanto,* $\sec(-\frac{\pi}{4})$ *es positivo*

Identidades trigonométricas

Las funciones trigonométricas de ángulos están relacionadas entre sí por medio de varias e importantes ecuaciones llamadas **identidades trigonométricas**. Ya hemos encontrado las identidades recíprocas. Estas identidades continúan cumpliéndose para cualquier ángulo θ, siempre que ambos lados de la ecuación estén definidos. Las identidades de Pitágoras son una consecuencia del Teorema de Pitágoras.*

IDENTIDADES FUNDAMENTALES

Identidades recíprocas

$$\csc\theta = \frac{1}{\operatorname{sen}\theta} \qquad \sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} \qquad \cot\theta = \frac{1}{\tan\theta}$$

$$\tan\theta = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} \qquad \cot\theta = \frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}$$

Identidades de Pitágoras

$$\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1 \qquad \tan^2\theta + 1 = \sec^2\theta \qquad 1 + \cot^2\theta = \csc^2\theta$$

EJEMPLO 5 | Expresar una función trigonométrica en términos de otra

(a) Expresar sen θ en términos de cos θ.

(b) Expresar tan θ en términos de sen θ, donde θ está en el segundo cuadrante.

SOLUCIÓN

(a) De la primera identidad de Pitágoras obtenemos

$$\operatorname{sen}\theta = \pm\sqrt{1-\cos^2\theta}$$

donde el signo depende del cuadrante. Si θ está en el primero o segundo cuadrante, entonces sen θ es positivo, y por tanto

$$\operatorname{sen}\theta = \sqrt{1-\cos^2\theta}$$

mientras que si θ está en el tercero o cuarto cuadrante, sen θ es negativo, y por tanto

$$\operatorname{sen}\theta = -\sqrt{1-\cos^2\theta}$$

(b) Como $\tan\theta = \operatorname{sen}\theta/\cos\theta$, necesitamos escribir cos θ en términos de sen θ. Por la parte (a),

$$\cos\theta = \pm\sqrt{1-\operatorname{sen}^2\theta}$$

y como cos θ es negativo en el segundo cuadrante, el signo negativo aplica aquí. Por lo tanto,

$$\tan\theta = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} = \frac{\operatorname{sen}\theta}{-\sqrt{1-\operatorname{sen}^2\theta}}$$

EJEMPLO 6 | Evaluación de una función trigonométrica

Si $\sec\theta = 2$ y θ está en el cuarto cuadrante, encuentre las otras cinco funciones trigonométricas de θ.

SOLUCIÓN Trazamos un triángulo como en la Figura 15 para que $\sec\overline{\theta} = 2$. Tomando en cuenta el hecho de que θ está en el cuarto cuadrante, obtenemos

$$\operatorname{sen}\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \cos\theta = \frac{1}{2} \qquad \tan\theta = -\sqrt{3}$$

$$\csc\theta = -\frac{2}{\sqrt{3}} \qquad \sec\theta = 2 \qquad \cot\theta = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

III. ACTIVIDADES POR DESARROLLAR

1. Si el ángulo θ está en posición normal, $P(x, y)$ es un punto sobre el lado terminal de θ y r es la distancia del origen a P, entonces

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{\square}{\square} \qquad \cos\theta = \frac{\square}{\square} \qquad \tan\theta = \frac{\square}{\square}$$

2. El signo de una función trigonométrica de θ depende del

________ en el que se encuentre el lado terminal del ángulo θ.

En el segundo cuadrante, sen θ es ________ (positivo/negativo).

En el tercer cuadrante, cos θ es ________ (positivo/negativo).

En el cuarto cuadrante, sen θ es ________ (positivo/negativo).

3-10 ■ Encuentre el ángulo de referencia para el ángulo dado.

3. (a) $150°$ (b) $330°$ (c) $-30°$

4. (a) $120°$ (b) $-210°$ (c) $780°$

5. (a) $225°$ (b) $810°$ (c) $-105°$

6. (a) $99°$ (b) $-199°$ (c) $359°$

7. (a) $\frac{11\pi}{4}$ (b) $-\frac{11\pi}{6}$ (c) $\frac{11\pi}{3}$

8. (a) $\frac{4\pi}{3}$ (b) $\frac{33\pi}{4}$ (c) $-\frac{23\pi}{6}$

9. (a) $\frac{5\pi}{7}$ (b) -1.4π (c) 1.4

10. (a) 2.3π (b) 2.3 (c) -10π

11-34 ■ Encuentre el valor exacto de la función trigonométrica.

11. sen $150°$ **12.** sen $225°$ **13.** cos $210°$

14. $\cos(-60°)$ **15.** $\tan(-60°)$ **16.** sec $300°$

17. $\csc(-630°)$ **18.** cot $210°$ **19.** cos $570°$

20. sec $120°$ **21.** tan $750°$ **22.** cos $660°$

23. sen $\frac{2\pi}{3}$ **24.** sen $\frac{5\pi}{3}$ **25.** sen $\frac{3\pi}{2}$

26. $\cos\frac{7\pi}{3}$ **27.** $\cos\left(-\frac{7\pi}{3}\right)$ **28.** $\tan\frac{5\pi}{6}$

IV. AUTOEVALUACION

1. **Analiza y responde en tu cuaderno las siguientes preguntas:**
   - ¿Qué aprendiste?
   - ¿Se te facilitaron los temas desarrollados en la guía?
   - ¿Qué se te facilitó?, ¿qué se te dificultó?
   - ¿Necesitas refuerzo?
2. **Con respecto a la guía**
   - ¿La guía fue clara?
   - ¿Fácil de comprender?
   - ¿Requieres de más ejemplos?

V. BIBLIOGRAFIA

Stewart, J., Redlin, L., & Watson, S. (2012). *Precálculo. Matematicas para el Cálculo* (6° ed.). México D.F.: Cengage Learning.