COLEGIO INSTITUTO TÉCNICO INTERNACIONAL IED P.E.I. EDUCACIÓN EN TECNOLOGÍA Y SU INFLUENCIA EN LA CALIDAD DE VIDA		
DOCENTE: Alejandra M Marta R	**ASIGNATURA:** Algebra	**CURSOS:** 901 - 902 JT
CÓDIGO: I - 05-12-04-2021	**TEMA:** GUIA N° 5. Expresiones Algebraicas (Productos notables - Factorización)	

I. INTRODUCCIÓN

Queridos estudiantes, reciban un cordial y afectuoso saludo, espero todos se encuentren bien en sus hogares, junto a sus familias.

Para la semana del 12 al 16 de abril del año en curso programé clase a través de Meet, la invitación llegará a los correos institucionales de los estudiantes. La idea es generar un encuentro, en el cual, se realizará la explicación de "***Expresiones Algebraicas (Productos notables – Factorización)***" contenido a desarrollar en la semana.

Asimismo, la guía de la semana se subirá a través de la plataforma Classroom, para ser desarrollada y enviada de vuelta mediante la misma aplicación. El plazo máximo de entrega es el lunes 19 de abril de 2021.

Quedo atenta a cualquier duda e inquietud, las cuales serán resueltas por medio del correo **matematicas2021.citi.jt@gmail.com** o al WhatsApp 311 5477015.

Muchas gracias por su atención y disposición para cumplir con el proceso escolar desde casa.

Cordialmente

Alejandra Milena Marta R
Lic. en Matemáticas UPN
Magister en Educación PUJ
Colegio Instituto Técnico Internacional IED.

IMPORTANTE TENER EN CUENTA PARA EL DESARROLLO Y ENVIO DE ACTIVIDADES

1. El estudiante debe escribir la parte de conceptualización, contenida en la guía.
2. En la parte superior de TODAS las hojas de la actividad que se va a enviar, escribir con esfero nombre, apellido, curso y cada hoja numerarla.
3. Si no se utiliza camscanner o alguna aplicación similar, por favor, tomar fotos nítidas que faciliten la revisión de las actividades.
4. Las actividades deben ser enviadas por Classroom. Enlace que se envió a través del correo institucional.
5. La actividad debe ser desarrollada por el estudiante, es decir, a puño y letra de este. No se permite editor de ecuaciones u otras aplicaciones que sistematicen las respuestas de las guías enviadas.

II. CONCEPTUALIZACION

1. DESEMPEÑO PARA EVALUAR

- Reconocer y aplicar los productos notables en multiplicaciones entre polinomios.
- Factoriza completamente una expresión algebraica

2. CONCEPTOS GENERALES

EXPRESIONES ALGEBRAICAS (Stewart, Redlin, & Watson, 2012)

Productos notables

Ciertos tipos de productos se presentan con tanta frecuencia que es necesario aprenderlos. Se pueden verificar las siguientes fórmulas al ejecutar las multiplicaciones.

FÓRMULAS DE PRODUCTOS NOTABLES

Si A y B son números reales cualesquiera o expresiones algebraicas, entonces

1. $(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$	Suma y producto de términos iguales
2. $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$	Cuadrado de una suma
3. $(A - B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$	Cuadrado de una diferencia
4. $(A + B)^3 = A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3$	Cubo de una suma
5. $(A - B)^3 = A^3 - 3A^2B + 3AB^2 - B^3$	Cubo de una diferencia

La idea clave en el uso de estas fórmulas (o cualquier otra fórmula en álgebra) es el **Principio de Sustitución**: podemos sustituir cualquier expresión algebraica por cualquier letra en una fórmula. Por ejemplo, para hallar $(x^2 + y^3)^2$ usamos la Fórmula 2 de Productos, sustituyendo x^2 por A y y^3 por B, para obtener

$$(x^2 + y^3)^2 = (x^2)^2 + 2(x^2)(y^3) + (y^3)^2$$

$$(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$$

EJEMPLO | Uso de las fórmulas de productos notables

Use las fórmulas de productos notables para hallar cada producto.

(a) $(3x + 5)^2$ **(b)** $(x^2 - 2)^3$

SOLUCIÓN

(a) Sustituyendo $A = 3x$ y $B = 5$ en la Fórmula 2 de Productos, obtenemos:

$$(3x + 5)^2 = (3x)^2 + 2(3x)(5) + 5^2 = 9x^2 + 30x + 25$$

(b) Sustituyendo $A = x^2$ y $B = 2$ en la Fórmula 5 de Productos, obtenemos:

$$(x^2 - 2)^3 = (x^2)^3 - 3(x^2)^2(2) + 3(x^2)(2)^2 - 2^3$$
$$= x^6 - 6x^4 + 12x^2 - 8$$

EJEMPLO | Uso de las fórmulas de productos notales

Encuentre cada producto.

(a) $(2x - \sqrt{y})(2x + \sqrt{y})$ **(b)** $(x + y - 1)(x + y + 1)$

SOLUCIÓN

(a) Sustituyendo $A = 2x$ y $B = \sqrt{y}$ en la Fórmula 1 de Productos, obtenemos:

$$(2x - \sqrt{y})(2x + \sqrt{y}) = (2x)^2 - (\sqrt{y})^2 = 4x^2 - y$$

(b) Si agrupamos $x + y$ y la vemos como una expresión algebraica, podemos usar la Fórmula 1 de Productos con $A = x$ y $B = 1$.

$$\begin{aligned}(x + y - 1)(x + y + 1) &= [(x + y) - 1][(x + y) + 1] \\ &= (x + y)^2 - 1^2 && \text{Fórmula de Producto 1} \\ &= x^2 + 2xy + y^2 - 1 && \text{Fórmula de Producto 2}\end{aligned}$$

Factorización

Factorización de factores comunes

Usamos la Propiedad Distributiva para expandir expresiones algebraicas. A veces necesitamos invertir este proceso (de nuevo usando la Propiedad Distributiva) al **factorizar** una expresión como un producto de otras más sencillas. Por ejemplo, podemos escribir

FACTORIZACIÓN →

$$x^2 - 4 = (x - 2)(x + 2)$$

← EXPANSIÓN

Decimos que $x - 2$ y $x + 2$ son **factores** de $x^2 - 4$.

El tipo más sencillo de factorización se presenta cuando los términos tienen un factor común.

EJEMPLO | Factorización de factores comunes

Factorice lo siguiente.

(a) $3x^2 - 6x$ **(b)** $8x^4y^2 + 6x^3y^3 - 2xy^4$

(c) $(2x + 4)(x - 3) - 5(x - 3)$

SOLUCIÓN

(a) El máximo factor común en los términos $3x^2$ y $-6x$ es $3x$, de modo que tenemos

$$3x^2 - 6x = 3x(x - 2)$$

(b) Observamos que

$$8,\ 6 \text{ y } -2 \text{ tienen el máximo factor común } 2$$
$$x^4,\ y^3 \text{ y } x \text{ tienen el máximo factor común } x$$
$$y^2,\ y^3 \text{ y } y^4 \text{ tienen el máximo factor común } y^2$$

Por tanto, el máximo factor común de los tres términos del polinomio es $2xy^2$, y tenemos

$$\begin{aligned} 8x^4y^2 + 6x^3y^3 - 2xy^4 &= (2xy^2)(4x^3) + (2xy^2)(3x^2y) + (2xy^2)(-y^2 \\ &= 2xy^2(4x^3 + 3x^2y - y^2) \end{aligned}$$

(c) Los dos términos tienen el factor común $x - 3$.

$$\begin{aligned} (2x + 4)(x - 3) - 5(x - 3) &= [(2x + 4) - 5](x - 3) && \text{Propiedad Distributiva} \\ &= (2x - 1)(x - 3) && \text{Simplifique} \end{aligned}$$

Factorización de trinomios

Para factorizar un trinomio de la forma $x^2 + bx + c$, observamos que

$$(x + r)(x + s) = x^2 + (r + s)x + rs$$

por lo que necesitamos escoger números r y s tales que $r + s = b$ y $rs = c$.

EJEMPLO | Factorizar $x^2 + bx + c$ por ensayo y error.

Factorice: $x^2 + 7x + 12$

SOLUCIÓN Necesitamos hallar dos enteros cuyo producto sea 12 y cuya suma sea 7. Por ensayo y error encontramos que los dos enteros son 3 y 4. Entonces, la factorización es

$$x^2 + 7x + 12 = (x + \underbrace{3)(x + 4}_{\text{factores de 12}})$$

Para factorizar un trinomio de la forma $ax^2 + bx + c$ con $a \neq 1$, buscamos factores de la forma $px + r$ y $qx + s$:

$$ax^2 + bx + c = (px + r)(qx + s) = pqx^2 + (ps + qr)x + rs$$

Por tanto, tratamos de hallar números p, q, r y s tales que $pq = a$ y $rs = c$, $ps + qr = b$. Si estos números son enteros todos ellos, entonces tendremos un número limitado de posibilidades de intentar conseguir p, q, r y s.

EJEMPLO | Factorización de $ax^2 + bx + c$ por ensayo y error

Factorice: $6x^2 + 7x - 5$

SOLUCIÓN Podemos factorizar 6 como $6 \cdot 1$ o $3 \cdot 2$ y -5 como $-5 \cdot 1$ o $5 \cdot (-1)$. Al tratar estas posibilidades, llegamos a la factorización

factores de 6

$$6x^2 + 7x - 5 = (3x + 5)(2x - 1)$$

factores de -5

<u>Formulas especiales de factorización</u>

Algunas expresiones algebraicas notables se pueden factorizar usando las fórmulas que siguen. Las tres primeras son simplemente Fórmulas de Productos Notables escritas a la inversa.

FÓRMULAS ESPECIALES DE FACTORIZACIÓN

Fórmula	Nombre
1. $A^2 - B^2 = (A - B)(A + B)$	Diferencia de cuadrados
2. $A^2 + 2AB + B^2 = (A + B)^2$	Cuadrado perfecto
3. $A^2 - 2AB + B^2 = (A - B)^2$	Cuadrado perfecto
4. $A^3 - B^3 = (A - B)(A^2 + AB + B^2)$	Diferencia de cubos
5. $A^3 + B^3 = (A + B)(A^2 - AB + B^2)$	Suma de cubos

EJEMPLO | Factorización de diferencias de cuadrados

Factorice lo siguiente.

(a) $4x^2 - 25$ **(b)** $(x + y)^2 - z^2$

SOLUCIÓN

(a) Usando la fórmula de Diferencia de Cuadrados con $A = 2x$ y $B = 5$, tenemos

$$4x^2 - 25 = (2x)^2 - 5^2 = (2x - 5)(2x + 5)$$

$$A^2 - B^2 = (A - B)(A + B)$$

(b) Usamos la fórmula de Diferencia de Cuadrados con $A = x + y$ y $B = z$.

$$(x + y)^2 - z^2 = (x + y - z)(x + y + z)$$

EJEMPLO | Factorización de diferencias y sumas de cubos

Factorice cada polinomio.

(a) $27x^3 - 1$ **(b)** $x^6 + 8$

SOLUCIÓN

(a) Usando la fórmula de la Diferencia de Cubos con $A = 3x$ y $B = 1$, obtenemos

$$27x^3 - 1 = (3x)^3 - 1^3 = (3x - 1)[(3x)^2 + (3x)(1) + 1^2]$$
$$= (3x - 1)(9x^2 + 3x + 1)$$

(b) Usando la fórmula de Suma de Cubos con $A = x^2$ y $B = 2$, tenemos

$$x^6 + 8 = (x^2)^3 + 2^3 = (x^2 + 2)(x^4 - 2x^2 + 4)$$

Un trinomio es un cuadrado perfecto si es de la forma

$$A^2 + 2AB + B^2 \qquad \text{o} \qquad A^2 - 2AB + B^2$$

Por lo tanto, **reconocemos un cuadrado perfecto** si el término medio ($2AB$ o $-2AB$) es más o menos dos veces el producto de las raíces cuadradas de los dos términos externos.

EJEMPLO | Reconocer cuadrados perfectos

Factorice cada trinomio.

(a) $x^2 + 6x + 9$ **(b)** $4x^2 - 4xy + y^2$

SOLUCIÓN

(a) Aquí $A = x$ y $B = 3$, de modo que $2AB = 2 \cdot x \cdot 3 = 6x$. Como el término medio es $6x$, el trinomio es un cuadrado perfecto. Por la fórmula del Cuadrado Perfecto tenemos

$$x^2 + 6x + 9 = (x + 3)^2$$

(b) Aquí $A = 2x$ y $B = y$, de modo que $2AB = 2 \cdot 2x \cdot y = 4xy$. Como el término medio es $-4xy$, el trinomio es un cuadrado perfecto. Por la fórmula del Cuadrado Perfecto tenemos

$$4x^2 - 4xy + y^2 = (2x - y)^2$$

EJEMPLO 13 | Factorizar por completo una expresión

Factorice por completo cada expresión.

(a) $2x^4 - 8x^2$ **(b)** $x^5y^2 - xy^6$

SOLUCIÓN

(a) Primero factorizamos la potencia de x que tenga el exponente más pequeño.

$$2x^4 - 8x^2 = 2x^2(x^2 - 4) \qquad \text{El factor común es } 2x^2$$
$$= 2x^2(x - 2)(x + 2) \qquad \text{Factorice } x^2 - 4 \text{ como una diferencia de cuadrados}$$

(b) Primero f[illegible]rizamos las potencias de x y de y que tengan los exponentes más pequeños.

$$x^5y^2 - xy^6 = xy^2(x^4 - y^4) \qquad \text{El factor común es } xy^2$$
$$= xy^2(x^2 + y^2)(x^2 - y^2) \qquad \text{Factorice } x^4 - y^4 \text{ como una diferencia de cuadrados}$$
$$= xy^2(x^2 + y^2)(x + y)(x - y) \qquad \text{Factorice } x^2 - y^2 \text{ como una diferencia de cuadrados}$$

Factorización por agrupación de términos

Los polinomios con al menos cuatro términos pueden factorizarse a veces por agrupación de términos. El siguiente ejemplo ilustra la idea.

EJEMPLO | Factorización por agrupación

Factorice lo siguiente.

(a) $x^3 + x^2 + 4x + 4$ (b) $x^3 - 2x^2 - 3x + 6$

SOLUCIÓN

(a) $x^3 + x^2 + 4x + 4 = (x^3 + x^2) + (4x + 4)$ Agrupe términos

$= x^2(x + 1) + 4(x + 1)$ Factorice factores comunes

$= (x^2 + 4)(x + 1)$ Factorice $x + 1$ de cada término

(b) $x^3 - 2x^2 - 3x + 6 = (x^3 - 2x^2) - (3x - 6)$ Agrupe términos

$= x^2(x - 2) - 3(x - 2)$ Factorice factores comunes

$= (x^2 - 3)(x - 2)$ Factorice $x - 2$ de cada término

III. ACTIVIDADES POR DESARROLLAR

1. Multiplica las expresiones algebraicas usando una fórmula de producto notable y simplifica:

   a. $(3x + 4)^2$ **b.** $(2x + 3y)^2$

   c. $(2u + v)^2$ **d.** $(x + 5)(x - 5)$

   e. $(3x - 4)(3x + 4)$ **f.** $(\sqrt{x} + 2)(\sqrt{x} - 2)$

   g. $(1 - 2y)^2$ **h.** $(x - 3y)^2$

   i. $(r - 2s)^2$ **j.** $(y - 3)(y + 3)$

   k. $(2y + 5)(2y - 5)$ **l.** $(\sqrt{y} + \sqrt{2})(\sqrt{y} - \sqrt{2})$

   m. $(y + 2)^3$ **n.** $(x - 3)^3$

   o. $(1 - 2r)^3$ **p.** $(3 + 2y)^3$

2. Factorice el factor común

   a. $-2x^3 + 16x$ **b.** $2x^4 + 4x^3 - 14x^2$

   c. $y(y - 6) + 9(y - 6)$ **d.** $(z + 2)^2 - 5(z + 2)$

e. $2x^2y - 6xy^2 + 3xy$ **f.** $-7x^4y^2 + 14xy^3 + 21xy^4$

3. Factorice el trinomio

a. $x^2 + 2x - 3$ **b.** $x^2 - 6x + 5$

c. $8x^2 - 14x - 15$ **d.** $6y^2 + 11y - 21$

e. $3x^2 - 16x + 5$ **f.** $5x^2 - 7x - 6$

4. Use una fórmula de factorización especial para factorizar la expresión.

a. $9a^2 - 16$ **b.** $(x + 3)^2 - 4$

c. $27x^3 + y^3$ **d.** $a^3 - b^6$

e. $8s^3 - 125t^3$ **f.** $1 + 1000y^3$

g. $x^2 + 12x + 36$ **h.** $16z^2 - 24z + 9$

5. Factorice la expresión agrupando términos.

a. $x^3 + 4x^2 + x + 4$ **b.** $3x^3 - x^2 + 6x - 2$

c. $2x^3 + x^2 - 6x - 3$ **d.** $-9x^3 - 3x^2 + 3x + 1$

e. $x^3 + x^2 + x + 1$ **f.** $x^5 + x^4 + x + 1$

IV. AUTOEVALUACION

1. Analiza y responde en tu cuaderno las siguientes preguntas:

- ¿Qué aprendiste?
- ¿Se te facilitaron los temas desarrollados en la guía?
- ¿Qué se te facilitó?, ¿qué se te dificultó?
- ¿Necesitas refuerzo?

2. Con respecto a la guía

- ¿La guía fue clara?
- ¿Fácil de comprender?
- ¿Requieres de más ejemplos?

V. BIBLIOGRAFIA

Stewart, J., Redlin, L., & Watson, S. (2012). *Precálculo. Matematicas para el Cáculo* (6° ed.). México D.F.: Cengage Learning.